Tampereen yliopisto

MAT-02651 Algoritmimatematiikka / Kaarakka
Tentti (1) 18.10.2019

Vastaa kaikkiin kysymyksiin ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta. Kaavat löytyvät paperin toiselta puolelta. Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös tutkintoohjelmasi.

Tehtävät

1. (a) (3 pistettä) Tarkastellaan binäärirelaatioita R, S ja T. Osoita todeksi tai näytä vastaesimerkillä vääräksi, että $R \circ (S \cap T) \subset (R \circ S) \cap (R \circ T)$.

   (b) (3 pistettä) Olkoon, että $R : \mathbb{Q} \leftrightarrow \mathbb{Q}$ sellainen relaatio, että aRb jos ja vain jos $|a-b| \leq 2$. Osoita, että R on ekvivalenssirelaatio tai näytä vastaesimerkillä, että se ei ole ekvivalenssirelaatio.

2. Tarkastellaan Boolen algebraa $\langle B; +, \cdot, ^{-}, 0, 1 \rangle$, jolle on voimassa $\forall x, y, z \in B$:

$$\begin{array}{ll} (x+y)+z = x+(y+z) & (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\ x+y = y+x & x \cdot y = y \cdot x \\ x+0 = x & x \cdot 1 = x. \\ x \cdot (y+z) = (x \cdot y)+(x \cdot z) & x+(y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z) \end{array}$$

   $\forall x \in B$; $x + \bar{x} = 1$ ja $x \cdot \bar{x} = 0$, kun $\bar{x}$ on alkion x *komplementti* tai *negaatio*.

   (a) (3 pistettä) Osoita, että $x = xx$.

   (b) (3 pistettä) Osoita, että $x + yz + \bar{x}y + \bar{y}xz = x + y$.

3. (a) (4 pistettä) Osoita (ilman totuustaulua), että

$$((U \to R) \wedge ((R \wedge S) \to (P \vee T)) \wedge (Q \to (U \wedge S)) \wedge \neg T) \to (Q \to P)$$

   on pätevä teoria.

   (b) (2 pistettä) Seuraavana on kaksi väitettä. Jos väite on tosi, niin perustele se ja jos epätosi, niin kumoa se. Muistutuksena $\mathbb{R}_+ = \{x | x > 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$

   (i) $\forall u \in \mathbb{R}_+, \exists v \in \mathbb{R}_+ : uv < v$,

   (ii) $\exists u \in \mathbb{R}_+, \forall v \in \mathbb{R}_+ : uv < v$,

4. (a) (3 pistettä) Todista oikeaksi tai kumoa seuraavat väitteet

   (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$ on surjektio,

   (ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$ on injektio.

   (b) (3 pistettä) Osoita määritelmän nojalla, että

$$n^3 - 4n^2 + 19 = O(n^3).$$

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio	Ekvivalenssi
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$	$p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$
	$p \vee \mathbf{e} = p$	$p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \to \mathbf{e} = \neg p$	
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathbf{t} \to p = p$	
	$p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$	
			$p \to p = \mathbf{t}$	
			$p \to q = \neg p \vee q$	
			$p \to q = \neg q \to \neg p$	

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \vee (p \wedge q) = p$
	$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$
	$p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP $\dfrac{P,\ P \to Q}{\therefore Q}$	**MT** $\dfrac{P \to Q,\ \neg Q}{\therefore \neg P}$	**Conj** $\dfrac{P,\ Q}{\therefore P \wedge Q}$	**Simp** $\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$
Add $\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	**DS** $\dfrac{P \vee Q,\ \neg Q}{\therefore P}$	**HS** $\dfrac{P \to Q,\ Q \to R}{\therefore P \to R}$	

muista rajoitukset

UI $\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	**UG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	**EG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	**EI** $\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) = \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$	$\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$
$\exists x\, (P(x) \to Q(x)) = \forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \vee P(x)) = C \vee \forall x\, P(x)$	$\forall x\, (C \wedge P(x)) = C \wedge \forall x\, P(x)$
$\exists x\, (C \vee P(x)) = C \vee \exists x\, P(x)$	$\exists x\, (C \wedge P(x)) = C \wedge \exists x\, P(x)$
$\forall x\, (C \to P(x)) = C \to \forall x\, P(x)$	$\exists x\, (C \to P(x)) = C \to \exists x\, P(x)$
$\forall x\, (P(x) \to C) = \exists x\, P(x) \to C$	$\exists x\, (P(x) \to C) = \forall x\, P(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$	$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \to (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$
$(\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$	$\forall x\, (P(x) \to Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x))$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \to \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	