MAT-01210 Insinöörimatematiikka A2 / Kaarakka
Tentti 1, 20.12.2016

Vastaa **jokaiseen kysymykseen** ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tehtävässä 2 riittää pelkkä vastaus. Tentissä **ei saa käyttää** muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta. Kirjoita **kaikkiin papereihin selkeästi** nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi. Muistathan antaa palautetta Kaiku-järjestelmän kautta saadaksesi opintosuorituksen. **Kaavat kääntöpuolella.**

Ratkaise **tehtävät 1 ja 2 omalle** paperilleen ja **tehtävät 3 ja 4 omalle** paperilleen.

1. Tarkastellaan matriiseja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(a) Laske, jos mahdollista, $2AB$ ja $3BA$.

(b) Laske, jos mahdollista, A^{-1}.

(c) Laske, jos mahdollista, $\det(A)$.

2. Vastaa lyhyesti (a)-(f) kohtien kysymyksiin. Jokaisen kohdan **oikeasta vastauksesta saat yhden pisteen, väärästä vastauksesta vähennetään puoli pistettä** ja vastaamatta jättäminen on nolla pistettä. Tehtävän kokonaispistemäärä ei kuitenkaan mene negatiiviseksi.

Tarkastellaan 4×4-matriisia A, jolle $\operatorname{rank}(A) = 3$.

(a) Onko matriisi A kääntyvä?

(b) Mikä on matriisin A sarakeavaruuden dimensio $\dim(R(A))$?

(c) Kuinka monta ratkaisua matriisiyhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on?

(d) Laske $\det(AB)$, kun B on 4×4-matriisi.

(e) Ovatko matriisin A sarakkeet lineaarisesti riippuvia?

(f) Onko $\operatorname{rref}(A) = I$?

3. Määritä Gaussin eliminointimenetelmää (muodosta yhtälöryhmä ja siitä kokonaismatriisi ...) käyttäen vakiot c ja d, niin että kolme $\mathbb{R}^3$ tasoa $x + 2y + z = 0$, $x + y = 0$ ja $-y + cz = d$.

(a) Leikkaavat täsmälleen yhdessä pisteessä. Esitä leikkauspiste.

(b) Leikkaavat täsmälleen yhdellä suoralla. Esitä suoran yhtälö.

(c) Eivät leikkaa missään pisteessä.

4. (a) Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. Etsi matriisin A ominaisarvot.

(b) Tarkastellaan matriisia $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, jonka eräs ominaisarvo on -1. Etsi ominaisarvoa -1 vastaava ominaisavaruus.

(c) Esitä matriisi C tulona PDP^{-1}, missä D on diagonaalimatriisi, kun matriisin C ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ ja ominaisarvoja vastaavat ominaisavaruudet ovat

$$E_1 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \text{ ja } E_{-2} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Insinöörimatematiikka 2
Kaavakokoelma

1. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

2. $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$

3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

4. $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u}$

5. $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$

6. $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$

7. $(AB)^T = B^T A^T,\ (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1},\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

8. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

9. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

10. $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},\ \det(A - \lambda I) = 0$

11. $V^{-1} A V = D \Leftrightarrow A = V D V^{-1}$

12. $A^T A \overline{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$