Tampereen yliopisto, ITC
Todennäköisyyslaskenta (MTTTP4, korvaa kurssia MAT-02500)
Tentti 4. 12. 2019

Omat taulukot ja laskimet ovat kiellettyjä. Vastaukset pitää perustella. Hervannan kampuksen tentti on uusinta, keskustakampuksen yleistentti.

1. Korttipakasta vedetään neljä korttia. Millä todennäköisyydellä

a) Kortit ovat eri maita,

b) eri arvoja,

c) sekä eri maita että eri arvoja.

[Korttipakassa on 52 korttia, jotka jakautuvat neljän maan kortteihin: hertat $\heartsuit$, ruudut $\diamondsuit$, ristit $\clubsuit$ ja padat $\spadesuit$. Kussakin maassa on 13 korttia, joilla on eri arvot.]

2. Korkeushyppääjän todennäköisyys ylittää rima, joka on korkeudella 195 cm, on $p = 0{,}7$. Harjoituksessa hän yrittää ylittää tällä korkeudella olevan riman, kunnes onnistuu. Olkoon X rimanpudotusten lukumäärä. Jos yritykset ovat toisistaan riippumattomia (mikä ei ole kovinkaan realistinen oletus) ja yhtä hyviä, niin $X \sim \mathrm{Geom}(p)$.

a) Kirjoita satunnaismuuttujan X avulla tapahtuma A, että korkeushyppääjä onnistuu ylittämään riman kilpailuissa vaaditulla kolmella kerralla.

b) Määritä $\mathbb{P}(A)$.

3. a) Määrittele, mitä tarkoitetaan ehdollisella todennäköisyydellä. Mitä siis tarkoittaa merkintä $\mathbb{P}(A \mid B)$?

b) Onko mahdollista, että $\mathbb{P}(A) = 0{,}2$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}4$ ja $\mathbb{P}(A \mid B) = 0{,}6$? Jos on, esitä esimerkki (hypoteettisesta) satunnaiskokeesta, jossa näin tapahtuu. Jos ei, perustele, miksi esitetyt arvot eivät ole mahdollisia.

4. Kuvatkoon X umpimähkäisesti valitun aikuisen suomalaisen naisen pituutta ja satunnaismuuttuja Y vastaavasti umpimähkäisesti valitun aikuisen suomalaisen miehen pituutta, molemmat senttimetreissä. Valintojen oletetaan olevan toisistaan riippumattomia. Tiedetään, että edellisen satunnaismuuttujan odotusarvo on $\mathbb{E}X = 164$ ja hajonta $\mathbb{D}X = 6$, kun taas jälkimmäiselle satunnaismuuttujalle saadaan $\mathbb{E}Y = 178$ ja hajonta $\mathbb{D}Y = 7$.

a) Määritä satunnaismuuttujan $X - Y$ odotusarvo μ ja varianssi σ^2. Laske myös hajonta $\mathbb{D}(X - Y)$ yhden numeron tarkkuudella.

b) Oletetaan edelleen, että X ja Y ovat normaalijakautuneita, jolloin $X - Y \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Määritä todennäköisyys $\mathbb{P}\{X > Y\}$ standardinormaalijakauman kertymäfunktion Φ avulla. (Pelkkä lauseke riittää; voit arvioida lukuarvoa tarkastuksen vuoksi.)

c) Miksi kohdan b oletukset eivät tarkasti ottaen ole realistisia? Onko realistisuuden puute ongelma?

Diskreettejä jakaumia

Ptnf lyhentää sanaa "pistetodennäköisyysfunktio".

Jakaumatyyppi: Binomijakauma

Parametrit: $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Ptnf: $f(k) = \mathbb{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, kun $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$.

Jakaumatyyppi: Hypergeometrinen

Parametrit: $N, K, n \in \mathbb{N}$, $N \geq K$, $N \geq n$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \text{Hyperg}(N, K, n)$

Ptnf:

$$f(k) = \mathbb{P}\{X = k\} = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

kun $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \min\{K, n\}$.

Jakaumatyyppi: Geometrinen

Parametrit: $p \in [0, 1]$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \text{Geom}(p)$

Ptnf: $f(k) = \mathbb{P}\{X = k\} = p(1-p)^k$.

Jakaumatyyppi: Poisson-jakauma

Parametrit: $\lambda > 0$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Ptnf: $f(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^k / k!$.

Jatkuvia jakaumia

Jakaumatyyppi: Tasainen jakauma

Parametrit: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{Tas}(a, b)$

Tiheysfunktio:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{kun } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

Jakauma: Standardinormaalijakauma

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$

Tiheysfunktio:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Standardinormaalijakauman kertymäfunktion arvoja:

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5	2	3
$\Phi(x)$	0,579	0,655	0,726	0,788	0,841	0,933	0,977	0,999

Jakaumatyyppi: Normaalijakauma

Parametrit: μ, σ^2

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Määrittely:

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$